



TITLE:

# Weak-Dirichlet Algebrasの Maximalityについて (Function Algebraとその応用)

AUTHOR(S):

中路, 貴彦

---

CITATION:

中路, 貴彦. Weak-Dirichlet AlgebrasのMaximalityについて (Function Algebraとその応用). 数理解析研究所講究録 1975, 232: 1-14

ISSUE DATE:

1975-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105465>

RIGHT:

# Weak-\* Dirichlet algebras の maximality に

ついて

北大 応電研 中路 貴彦

$A$  を  $L(\tilde{m})$  の weak-\* Dirichlet algebra とする。  $H(\tilde{m})$  を含む  $L(\tilde{m})$  の subalgebra の形を決定する。 Muhly は特別な場合に、  $H(\tilde{m})$  が  $L(\tilde{m})$  の maximal な weak-\* 閉 subalgebra であること、すなわち  $H(\tilde{m})$  を含む  $L(\tilde{m})$  の subalgebra は  $H(\tilde{m})$  と  $L(\tilde{m})$  のみであることを示した。更に、torus 上のある weak-\* Dirichlet algebra  $H(\tilde{\alpha} \otimes \phi)$  を不変部分空間によって特長づける。 Merrill は circle 上の古典的な  $H(\tilde{\alpha})$  を、不変部分空間によって特長づけた。

## § 1. 準備

$A$  が weak-\* Dirichlet algebra であるとは、(i)  $A$  が確率測度空間  $(X, \mathcal{M}, m)$  上の  $L(\tilde{m})$  の subalgebra である、(ii)  $A + \bar{A}$  は  $L(\tilde{m})$  で weak-\* 稠密である、(iii)  $m$  は  $A$  上

*multiplicative* である、ことである。

抽象的な *Hardy* 空間  $H^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) とは、 $1 \leq p < \infty$  のときは  $H^p$  は  $A$  の  $L^p(m)$ -閉包でありかつ  $H^\infty$  は  $A$  の  $L^\infty(m)$  における *weak*-\* 閉包である。 $H_0^p = \{ f \in H^p : \int f dm = 0 \}$  とする。 $M$  を  $L^\infty(m)$  の部分集合とするとき、 $[M]_2$  は  $M$  の  $L^2(m)$ -閉包である。 $X$  上の可測集合  $E$  に対して、 $\chi_E$  はその特性関数である。 $f \in L^p(m)$  に対して、 $\chi_f$  は  $f$  の *support set*  $E_f$  の特性関数である。

(a)  $M$  は  $L^\infty(m)$  の *weak*-\* 閉な不変部分空間とするとき、 $M = [M]_2 \cap L^\infty(m)$ 。

## § 2. Torus 上の $H(d\theta d\varphi)$ の特長づけ

$A$  を *torus*  $T^2 = \{(z, w) : |z| = |w| = 1\}$  上で  $z^n w^m$  ( $n, m$  は整数で  $(n, m) \in \Gamma$ ) の多項式で一様近似される連続関数の全体とする。ここで、 $\Gamma = \{(n, m) : m > 0\} \cup \{(n, 0) : n \geq 0\}$ 。  $d\theta d\varphi / 4\pi^2$  を  $T^2$  上の正規 *Haar* 測度とし、 $d\theta d\varphi$  と書くことにする。このとき、 $A$  は  $L^\infty(d\theta d\varphi)$  における *weak*-\* *Dirichlet algebra* となる。 $H^p$  を  $H^p(d\theta d\varphi)$  と書くことにする。

$A$  を一般的に *weak-\* Dirichlet algebra* とする。そして、 $m$  を  $A$  上の *multiplicative* な関数と考えたときの *Gleason part* は  $m$  のみではないとする。このとき、 $H^\infty$  のある *inner* 関数  $Z$  を用いて  $H_0^\infty = ZH^\infty$  とできる。

(b) 次の(1)~(4)は同値である。

(1)  $H^\infty$  は古典的な *circle* 上の  $H^\infty(d\theta)$  に等距離同型である。

(2)  $H^\infty$  は  $L^\infty$  における  $Z$  の多項式の *weak-\** 閉包の全体である。

(3)  $M$  は  $H^\infty$  の任意の *weak-\** 閉不変部分空間で、 $M \neq \{0\}$  とする。このとき、 $M$  のある *inner* 関数  $F$  を用いて、 $M = FH^\infty$  と書ける。

(4)  $H^\infty$  は  $L^\infty$  の *maximal* な *weak-\** 閉 *subalgebra* である。

(1) と (2) の同値性は下の (d) による。Merrill [3] は (2)、(3)、(4) が同値であることを示した。

この節では、*circle* 上の  $H^\infty(d\theta)$  の特長づけに対応して、*torus* 上の  $H^\infty(d\theta d\varphi)$  の特長づけをする。

$J^\infty = \bigvee_{n=0}^\infty \bar{z}^n H^\infty$  の *weak-\** 閉包、 $I^\infty = \bigwedge_{n=0}^\infty z^n H_0^\infty$  とする。

定理 1

(1)  $J^\infty$  は  $H^\infty$  を本当に含む最小の *weak*-\* 閉 *subalgebra* である。

(2)  $I^\infty$  は  $H^\infty$  における  $J^\infty$  の最大の *weak*-\* 閉イデアルである。

$\mathcal{H}^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) は  $Z$  の多項式の  $L^p(m)$  における閉包とする ( $p = \infty$  のときは *weak*-\* 閉包)。  $\mathcal{L}^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) は  $Z$  と  $\bar{Z}$  の多項式の  $L^p(m)$  における閉包とする。  $I^p$  は  $L^p(m)$  における  $I^\infty$  の閉包で、  $\mathcal{J}^p$  は  $L^p(m)$  における  $I^p + \bar{I}^p$  の閉包とする。  $J^p$  は  $J^\infty$  の  $L^p(m)$  における閉包とする。

次の事が知られている [4, Lemma 5]。

$$(c) \quad H^p = \mathcal{H}^p + I^p, \quad L^p = \mathcal{L}^p + \mathcal{J}^p, \\ J^p = \mathcal{L}^p + I^p, \quad L^2 = J^2 + I^2.$$

ここで、 $+$  は代数的な直和であり、 $p = 2$  のときは直交分解である。

次は *Lumner* の等距離 [2] である。

(d)  $1 \leq p \leq \infty$  で、*circle* 上の  $L^p(d\theta)$  と  $\mathcal{L}^p$  (*circle* 上の  $H^p(d\theta)$  に対しては  $\mathcal{H}^p$ ) とが、等距離\*-同型となる。

ここで  $*$ -同型とは、複素共役は複素共役に写っていることである。

この節における主定理を証明するために、上の2つの事実に対応するものとして (e) と (f) を述べる。証明は上の (c) と (d) にほとんど同じである。  $g$  を  $I^\infty$  の定数ではない *inner* 関数とする。  $H^p (1 \leq p \leq \infty)$  は  $L^p_{(m)}$  での  $Z^n g^m ((n, m) \in \Gamma)$  の多項式の  $L^p_{(m)}$ -閉包とする。このとき、  $ZI^p = I^p$  から、  $H^p$  は  $H^p$  の部分空間でありかつ  $H^\infty$  は  $H^\infty$  の *subalgebra* である。  $L^p (1 \leq p \leq \infty)$  は  $L^p_{(m)}$  での  $Z, \bar{Z}, g, \bar{g}$  の多項式の閉包とする。

$S^p = \{ f \in H^p : \int Z^n \bar{g}^m f dm = 0, (n, m) \in \Gamma \}$   
 とする。  $\mathcal{S}^p$  は  $S^p + \bar{S}^p$  の  $L^p_{(m)}$  における閉包である。

(e)  $1 \leq p \leq \infty$  とする。このとき、 *torus* 上の  $L^p(d\theta d\varphi)$  と  $L^p$  (*torus* 上の  $H^p(d\theta d\varphi)$ ) に対しては  $H^p$  とが、等距離に  $*$ -同型となる。

(f)  $1 \leq p \leq \infty$  とする。このとき、

$$H^p = \mathbb{H}^p + S^p, \quad L^p = \mathbb{L}^p + \mathcal{S}^p.$$

ここで、やはり  $p = 2$  のときは直交分解である。

**補題**  $I^\infty = gJ^\infty$  とする。このとき、この *inner* 関数に対して定義される  $S^\infty$  は  $J^\infty$ -不変部分空間となり、 $gS^\infty = S^\infty$  である。

今は、(b)に対応して、次の定理を証明できる。

**定理 2**  $H^\infty$  の次の性質は同値である。

- (1)  $H^\infty$  は *torus* 上の  $H(\text{dodg})$  に等距離同型である。
- (2)  $H^\infty$  は  $L^\infty$  における  $Z^n g^m$  ( $(n, m) \in \Gamma$ ) の多項式の *weak*-\* 閉包の全体となる。ここで、 $g$  は  $H^\infty$  の *inner* 関数である。
- (3)  $J^\infty$  は *doubly* - 不変部分空間を含まない。  $M$  を  $H^\infty$  の *weak*-\* 閉な  $J^\infty$ -不変部分空間で  $M \neq \{0\}$  とする。このとき、*unimodular* 関数  $F$  とある  $\chi_E \in J^\infty$  が存在して、

$$M = \chi_E F J^\infty$$

とかける。

**証明** (1)  $\Leftrightarrow$  (2) は (c) である。(2)  $\Rightarrow$  (3) は [4, p 473] にある。(3)  $\Rightarrow$  (2) を示す。仮定からある  $\chi_E \in J^\infty$  と *unimodular* 関数  $F$  があって、 $I^\infty = \chi_E F J^\infty$  とできる。もし、 $m(E) < 1$  なら、(c) から  $J^\infty$  は *doubly* - 不変部分空間を含んでしまう。よって  $I^\infty = F J^\infty$  とできる。補題の  $g$  と

してこの  $F$  をとると、 $S^\infty$  は  $H^\infty$  の  $J^\infty$ -不変部分空間となりかつ仮定から  $FS^\infty = S^\infty$  とできる。もし  $S^\infty \neq \{0\}$  なら、仮定より、ある inner 関数  $G$  とある  $\chi_F \in J^\infty$  があり、

$$S^\infty = \chi_F G J^\infty.$$

$\chi_F G \in \chi_F G J^\infty$  と  $\bar{F} S^\infty = S^\infty$  より、 $\chi_F G \bar{F} \in \chi_F G J^\infty$ 。よって  $\chi_F \bar{F} = \chi_F g$  となる  $g \in J^\infty$  がある。だから、 $\chi_F = \chi_F F g$ 。  
 $F \in I^\infty$  から  $Fg \in I^\infty$  よって  $\chi_F \in I^\infty$  となる。特性関数に関しては  $\chi_F \in \mathcal{L}^\infty$  と  $\chi_F \in J^\infty$  は同値だから、 $\chi_F \in \mathcal{L}^\infty$  である。

$\chi_F \in I^\infty \cap \mathcal{L}^\infty$  から、 $\chi_F = 0$  a.e. となり、 $S^\infty \neq \{0\}$  に反する。よって  $S^\infty = \{0\}$  となり、(f) により  $H^\infty = H^\infty$  となる。これは (2) である。

(b) の (4) に対応する  $H^\infty$  の性質は何であり、その性質は定理 2 の (1) と同値となるかを考えるのは自然である。これは次の節にゆずる。

### § 3. $H^\infty$ を含む subalgebra

$A$  は  $L^\infty(m)$  の weak- $*$  Dirichlet algebra とする。特に断わらない限りは、 $m$  を含む Gleason part は  $m$  のみであつておかまわれない。



Muhly [5] は、 $\forall f \in H^\infty$  なら  $|f| > 0$  a.e. であることと  $H^\infty$  が  $L^\infty(m)$  の maximal な weak-\* 閉 subalgebra であることが同値であることを示した。しかし、一般的には、 $H^\infty$  の恒等的に零ではない関数で、正測度の集合上で零である関数が存在する。よって  $H^\infty$  と  $L^\infty(m)$  との間に、weak-\* 閉な subalgebra が存在する。そんな subalgebra がどんな形をしているか、そして  $H^\infty$  の関数の support set とどのような関係にあるかを知りたい。

**定理 3**  $V$  は  $H^\infty$  を含む  $L^\infty(m)$  の weak-\* 閉な subalgebra とする。そのとき、次の事は同値である。

- (1) すべての  $f \in V$  に対して、 $\chi_f \in V$ 。
- (2) すべての  $f \in H^\infty$  に対して、 $\chi_f \in V$ 。
- (3)  $B$  が  $L^\infty$  の  $V$  を含む weak-\* 閉 subalgebra ならば、ある  $\chi_E \in V$  があって、次の形をしている。

$$B = \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty.$$

このとき、 $\chi_E V$  は doubly-不変部分空間を含まない。

**系** (Muhly [5])  $H^\infty$  についての次の性質は同値である。

- (1) すべての  $f \in H^\infty$  に対して、 $|f| > 0$  a.e. .

(2)  $H^\infty$  は  $L^\infty$  の maximal な weak-\* 閉 subalgebra である。

定理 3 の証明 (1)  $\Rightarrow$  (2) は明らか。 (2)  $\Rightarrow$  (3)。

$K$  を  $L^2$  での  $B$  の直交補空間とする。  $K \neq \{0\}$  としてよい。

$E$  を  $K$  の support set とすると、  $\chi_E \in V$  となる。 何故なら、  $H^\infty \subseteq B$  から、  $K \subset H^\infty_0$  [6, p226]。  $f \in H^2$  なら、  $H^\infty$  に関数  $g$  があり、  $\chi_f = \chi_g$  とできる [5]。 よって  $\forall f, g \in K$  なら、  $F = E_f \setminus E_g$  とすると、  $\chi_F \in V$  である。  $\chi_F B \subseteq B$  だから、  $\chi_F K \subseteq K$  である。 よって  $h = g + \chi_F f$  は  $K$  に属する。 これは、  $\forall f, g \in K$  なら、 関数  $h \in K$  で  $E_h = E_f \cup E_g$  となるものがあることを示している。  $F_\alpha \subseteq E$  かつ  $\chi_{F_\alpha} \in V$  となる集合に対して、  $F_0 = \bigcup F_\alpha$  とすると、  $\chi_{F_0} \in V$  かつ  $F_0 \subseteq E$ 。  $m(F_0) = m(E)$  を導びくことができる。

$\chi_{E^c} K = \{0\}$  から、  $B \supseteq \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$  となる。  $E$  は  $K$  の support set であり、  $K$  は  $B$  の直交補空間であるから、  $\chi_E V$  は doubly - 不変部分空間を含まない。

今は、  $B = \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$  となることを示す。  $B \neq \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$  とする。 そのとき、 Muhly [5] のようにして、 定数でない unimodular 関数  $g$  で、  $g, \bar{g} \in B$  だが  $\bar{g} \notin \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$  となるものがある。 このとき、  $\chi_E \bar{g} \notin \chi_E V$  となっている。

$N$  を  $\mathcal{G}$ ,  $\bar{\mathcal{G}}$  と  $V$  に属するすべての特性関数  $\chi_F$  の多項式の *weak-\** 閉包とする。そのとき、 $N$  は  $L^2$  上の作用素の作る *algebra* として可換な *von Neuman algebra* となり  $B$  に含まれる。 $\chi_E \bar{\mathcal{G}} \not\subset V$  により  $V$  は  $\chi_E N$  の全体を含むことはできない。これを用いて、 $N$  の中に  $\chi_{E_0}$  があり、 $\chi_{E_0} \wedge E \neq 0$  a.e. かつ  $\forall \chi_F \in V$  かつ  $\chi_F \neq 0$  a.e. のとき、

$$\chi_{E_0} \wedge E \cdot \chi_F \neq \chi_F$$

とできることを示すことができる。 $\chi_{E_0} \wedge E \in B$  から  $\chi_{E_0} \wedge E K \subseteq K$  である。もし  $\chi_{E_0} \wedge E K \neq \{0\}$  なら、 $\chi_{E_0} \wedge E \cdot \chi_{F_0} = \chi_{F_0}$  となる零でない  $\chi_{F_0} \in V$  があることを示すことができる。この矛盾により、 $\chi_{E_0} \wedge E K = \{0\}$  でなければならぬ。 $m(E_0 \wedge E) > 0$  だから  $E$  が  $K$  の *support set* であることに反する。かくして、 $B = \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$  となる。

(3)  $\Rightarrow$  (1)。  $f$  を  $V$  の任意の関数とする。 $\chi_f \neq 0$  a.e. としよ。  $D = D(f) = \{f \cdot g : g \in V\}$  の *weak-\** 閉包とすると、 $D \subseteq V$  で  $D$  の *support set* は  $E_f$  と一致する。

$$B = \{\psi \in L^\infty : \psi D \subset D\}$$

とすると、 $B$  は  $V$  を含む。(3) の条件より、 $\chi_f \in V$  を導びくことができる。

もし、 $m$  を含む *Gleason part* が  $m$  のみではないとすると、

$V$ として  $J^\infty$  を考えることができる。 $J^\infty$ は定理1より  $H^\infty$  を含む最小の *weak-\** 閉 *subalgebra* であつた。

§2 の終りで触れた (b) の (4) に対応する  $H^\infty$  の性質として定理3の(2)を考えるのは自然である。しかし、次の定理4と §4 の例(2)は、その条件が *torus* 上の  $H(\text{dodg})$  の特長づけとはならないことを示している。

**定理4**  $H^\infty$  についての次の性質は同値である。

- (1) すべての  $f \in H^\infty$  に対して、 $\chi_f \in J^\infty$ 。
- (2)  $B$  が  $L^\infty$  の  $H^\infty$  を含む *weak-\** 閉 *subalgebra* ならば、ある  $\chi_E \in J^\infty$  があつて、次の形をしている。

$$B = \chi_E J^\infty + \chi_E^\perp L^\infty.$$

このとき、 $\chi_E J^\infty$  は *doubly*-不変部分空間を含まない。

**系** もしすべての  $f \in H^\infty$  に対して、 $\chi_f \in J^\infty$  となつていなるなら、 $H^\infty$  を含む  $L^\infty$  の  $L^\infty$  と一致しない *weak-\** 閉 *subalgebra* で、*maximal* なものはない。

## § 4 . 例

(1)  $A$  を §2 の初めに定義した、torus 上の *weak-\** *Dirichlet algebra* とする。このとき、 $\tilde{H}^{dod\varphi}$  を含む *Gleason part* は  $\tilde{H}^{dod\varphi}$  のみではない。この  $\tilde{H}^{dod\varphi}$  は Merrill [3] が *maximal* でない *weak-\** 閉 *subalgebra* の例として述べたものである。しかし、すべての  $f \in \tilde{H}^{dod\varphi}$  に対して、 $X_f \in J^\infty$  を示すことができるから、定理 4 によって  $\tilde{H}^{dod\varphi}$  を含む  $L^\infty(dod\varphi)$  の *weak-\** 閉 *subalgebra* の形がわかる。更に、[1, p303] により  $A$  を含む torus 上の複素数値連続関数の全体  $C(T^2)$  の一様に閉な *maximal subalgebra* が存在するが、定理 4 の系により  $\tilde{H}^{dod\varphi}$  を含む  $L^\infty(dod\varphi)$  の *weak-\** 閉 *subalgebra* の中に *maximal* なものはない。

(2)  $K$  を実数直線の Bohr 1 ンパクト化とする。 $A$  を  $T \times K$  上で  $\sum x_\tau$  の多項式で一様近似される連続関数の全体とする。このとき、 $x_\tau$  は  $K$  上の *character* で、 $(n, \tau) \in \Gamma$ 、 $\Gamma = \{(n, \tau) : \tau > 0\} \cup \{(n, 0) : n \geq 0\}$  であるとする。 $m$  を  $T \times K$  上の正規 *Haar* 測度とする。このとき、 $m$  の *Gleason part* は  $m$  のみではない。すべての  $f \in H^\infty$  に対して、 $X_f \in J^\infty$  を示すことができる。しかし、 $H^\infty$  は torus 上の  $\tilde{H}^{dod\varphi}$  に等距離同型ではない。

(3)  $K$  を (2) と同じとする。  $A$  を  $K \times K$  上で  $X_{T_1} X_{T_2}$  の多項式で一様近似される連続関数の全体とする。このとき、  $X_{T_i}$  は  $K$  上の *character* で、  $(T_1, T_2) \in \Gamma$  で、  $\Gamma = \{(T_1, T_2) : T_2 > 0\} \cup \{(T_1, 0) : T_1 \geq 0\}$  であるとする。 $m$  を  $K \times K$  上の正規 *Idaar* 測度とする。このとき、  $m$  の *Gleason part* は  $m$  のみである。

$V = \bigcup_{T_i \geq 0} \overline{X_{T_i} H^\infty}$  の *weak*- $*$  閉包  
 とすると、  $H^\infty \subsetneq V \subsetneq L^\infty(m)$  かつ  $V$  は *subalgebra* である。  
 よって  $H^\infty$  は  $L^\infty(m)$  の *maximal weak*- $*$  閉 *subalgebra* ではない。しかしすべての  $f \in H^\infty$  に対して、  $X_f \in V$  となっているから、定理 3 を用いて、  $V$  を含むすべての *weak*- $*$  閉 *subalgebra* の形がわかる。

## 文 献

1. K. Hoffman, Maximal subalgebras of  $C(\Gamma)$ , Amer. J. Math., 79(1957), 295-305.
2. G. Lumer,  $H^\infty$  and the imbedding of the classical  $H^p$  spaces in arbitrary ones, Proc. Internat. Sympos. on Function Algebras (Tulane Univ., 1965), Scott-Foresman, Chicago, III., 1966, 285-286.

3. S. Merrill, Maximality of Certain Algebras  $H^\infty(dm)$ ,  
Math. Zeit., 106(1968), 261-266.
4. S. Merrill and N. Lal, Characterization of certain  
invariant subspaces of  $H^p$  and  $L^p$  spaces derived  
from logmodular algebras, Pacific J. Math., 30(1969),  
463-474.
5. P. S. Muhly, Maximal weak-\*Dirichlet algebras, Proc.  
Amer. Math. Soc., 36(1972), 515-518.
6. T.P. Srinivasan and Ju-kwei Wang, Weak\*-Dirichlet  
algebras, Proc. Internat. Sympos. on Function Algebras.  
(Tulane Univ., 1965), Scott-Foresman, Chicago, III.,  
1966, 216-249.